Lycée Laymoune BERKAN — Prof. YAZOUGH MOHAMED

◇26-03-2020◇

★ Etude analytique de l'espace ★

Leçon n°: 12 — 2ème B.P.M.V.A

① Repérage dans l'espace (المعلم في الفضاء)

Coordonnées : (الإحداثيات)

Déf : On appel repère de l'espace tout quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec :

- O un point de l'espace.
- $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires (pas dans le même plan (غير مستوائية)

et on a :

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthogonal (متعامد) $\Leftrightarrow$ les droites (Ox), (Oy) et (Oz) sont perpendiculaires

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal (متعامد ممنظم) $\Leftrightarrow$ • $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthogonal et : • $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

(Oz) l'axe des cotes محور الأناسيب

(Oy) l'axe des ordonnées (محور الاراتيب)

(Ox) l'axe des abscisses (محور الأفاصيل)

O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

Thm : a) Soit M un point de l'espace.

$\exists (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y\vec{j} + z.\vec{k}$

et on écrit $M(x; y; z)$.

- Le triplet $(x; y; z)$ est appelé : coordonnées de M.

b) Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

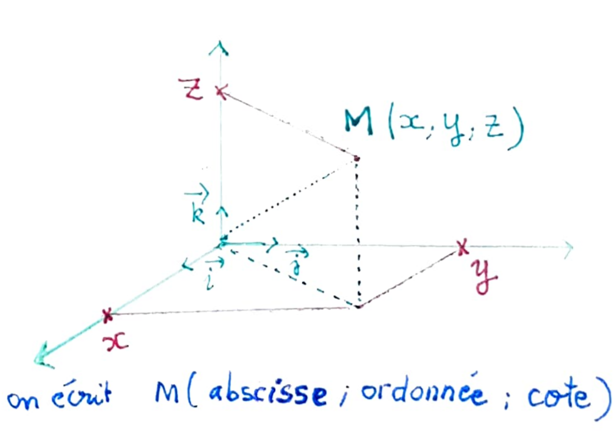
$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \vec{u} = a.\vec{i} + b\vec{j} + c.\vec{k}$

- Le triplet (a, b, c) est appelé : coordonnées de $\vec{u}$ et on note :

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

★ **Exemple :** • le point $A(1, -1, 0)$ s'écrit autrement : $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j}$

• $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



on écrit M(abscisse ; ordonnée ; cote)

② Calcul sur les coordonnées.

a) Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$

alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

b) Soit I le milieu du segment $[a; b]$.

on a : $I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

c) si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

alors :

$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{pmatrix}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : $\alpha . \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha . a \\ \alpha . b \\ \alpha . c \end{pmatrix}$

> **EX.1** / $A(3;1;5)$; $B(2,4,0)$ et I est le milieu de $[AB]$.
> Déterminer les coordonnées de : I , $\vec{AB}$, $\vec{BA}$ et $\frac{1}{2}\vec{AB}$

③ Colinéarité de deux vecteurs.

(استقامية متجهتين)

> **Déf** : $\vec{u}$, $\vec{v}$ colinéaire $\Leftrightarrow$ $(\exists k \in \mathbb{R})$; $\vec{u} = k . \vec{v}$

> **Prop** : si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ on note T le tableau : $\begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{bmatrix}$
> et on a :
>
> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaire (مستقيميتان)
>
> ssi les sous déterminants extraits du tableau T sont tous nuls
>
> C-à-d : $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$;
>
> $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$

Rappel : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = (x)(y') - (y)(x')$

★ Exemple : $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

on a : $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

on calcul les sous déterminants extraits (المحددات المستخرجة)

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-6)(-1) = 6 - 6 = 0$

$\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-6)(4) - (2)(3) = -24 - 6 = -30$

$-30 \neq 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

4! → On dit qu'ils sont : linéairement indépendant.

> **★ Résultat .1** trois point A, B et C sont **alignés** ssi : $\vec{AB}$; $\vec{AC}$ colinéaires.

④ Déterminant de trois vecteurs.

si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$

on note :

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} \overset{+}{a} & \overset{-}{a'} & \overset{+}{a''} \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= +a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a'\begin{vmatrix} b & b'' \\ c & b'' \end{vmatrix} + a''\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

★ Exemple : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a :

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= +1 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (0-12) + 2(0-12) + 2(6-0) = -12 - 24 + 12$$

$$= \boxed{-24}$$

(5) Coplanarité de trois vecteurs
(استوائية ثلاث متجهات)

Prop: $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$ coplanaires (dans le même plan) ssi $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$

Exemple: $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}; \vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}; \vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

montrons que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires:

On a: $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\3 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}$

$= (0-1) - (0-1) + 0 = -1 + 1 = \boxed{0}$

donc $\vec{u}$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires
(توجد في نفس المستوى)

★ Résultat . 2: Soient A, B, C et D 4 points de l'espace.
A, B, C et D sont **coplanaires** ssi $\vec{AB}, \vec{BC}$ et $\vec{CD}$ sont **coplanaires**

(6) Orthogonalité de deux vecteurs :
(تعامد متجهتين)

Le produit scalaire de $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et de $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ est le nombre réel noté est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a \times a' + b b' + c \times c'$$

et on a :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

★ Exemple: $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}; \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\\5\end{pmatrix}$

a-t-on $\vec{u} \perp \vec{v}$?

Réponse: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(-2) + (-2)(-1) + (0)(5)$
$= -2 + 2 + 0 = 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

(7) Représentation paramétrique d'une droite

Une droite (D) dans l'espace est déterminé par :

- un point $A(x_A; y_A; z_A) \in (D)$
- un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ (متجهة موجهة)

et on note : $D(A; \vec{u})$.

Déf
On appelle représentation paramétrique de (D) le système :

$$(D) \begin{cases} x = x_A + a.t \\ y = y_A + b.t \\ z = z_A + c.t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

où t est le paramètre.

★ Exemple: $(\Delta) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = -5 + 7t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

est la représentation paramétrique de la droite passant par le point : $A(1; 3; -5)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$

EX. 21 Donner un représentation paramétrique de la droite $D(A; \vec{u})$ dans chaque cas :

1°/ $A(-1; 2; 3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$

2°/ $A(0; 1; 0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

3°/ $A(0; 0; 0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-4\\1/2\end{pmatrix}$.

Ex.3 On considère la droite :

$$(D) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1°/ Donner deux points A et B appartenant à (D).

2°/ Donner un vecteur directeur de (D).

3°/ Soit $E(2 ; -1 ; 0)$. Est ce que $E \in (D)$?

③ Position relative de deux droites.

Il y a 4 cas possibles :

I). (D) et (Δ) coplanaires (et parallèles)
(مستوائيان)

(D) (Δ)

(D) (Δ)

$(D) /\!/ (\Delta)$
(strictement) parallèle
متوازيان (قطعا)

$(D) = (\Delta)$ ils sont confondues
(منطبقان)

II). (D) et (Δ) non parallèles :

(D) A (Δ)

(Δ) (D)

(D) et (Δ) sont : sécantes (متقاطعان) et coplanaires

$(D) /\!/ (\Delta) \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ colinéaires.

$(D) \perp (\Delta) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Req : ① si $(D) \cap (\Delta) = \emptyset$ alors :

(D) et (Δ) sont strictement parallèles ou confondues (voir les exercices)

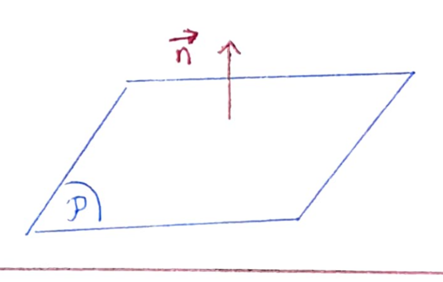
② si (D) et (Δ) ne sont pas parallèles alors :

(D) et (Δ) sont sécantes ou non coplanaires.

⑨ Equation cartésienne d'un plan :

Soient (P) un plan dans l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

Déf : $\vec{n}$ est normal (منظمية) à (P) si : $\vec{n} \perp (P)$



Prop : $(\mathcal{P})$ un plan passant par A
$\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.
on a : $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

★ **Exemple :** Soit $(\mathcal{P})$ un plan passant par $A(1 ; -2 ; 5)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ est normal à $(\mathcal{P})$. Trouver une équation de $(\mathcal{P})$.

Réponse : Soit $M(x ; y ; z)$ un point de l'espace.

on a $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

avec : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - (1)\\ y - (-2)\\ z - (5)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\ y+2\\ z-5\end{pmatrix}$

puis : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow 3(x - 1) + 0(y + 2) + 4(z - 5) = 0$

$M \in (\mathcal{P}) \iff 3x + 4z - 3 - 20 = 0$

finalement : $(\mathcal{P}) : 3x + 4z - 23 = 0$

Thm et déf : Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tout plan $(\mathcal{P})$ admet une équation cartésienne :

$$ax + b.y + c.z + d = 0$$

de plus $\vec{n}(a; b; c)$ est normal à $(\mathcal{P})$.

★ **Exemple :** (Q) $x + 10y - 7 = 0$

(Q) est un plan et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\10\\0\end{pmatrix}$ est normal à (Q).

Prop : Soient $(\mathcal{P})$ et (Q) deux plan d'équations : $(\mathcal{P})$ $ax+by+cz+d=0$

(Q) $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

on a : $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal à $(\mathcal{P})$

$\vec{n'}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ est normal à (Q).

$(\mathcal{P}) // (Q) \iff \vec{n}; \vec{n'}$ colinéaires

$(\mathcal{P}) \perp (Q) \iff \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$

EX. 41 On donne les équations cartésiennes de deux plans :

$(\mathcal{P}) : x - 4y + 7 = 0$

$(Q) : x + 2y - z + 1 = 0$

1°/ Mq $(\mathcal{P})$ et (Q) sont sécantes

2°/ Déterminer un vecteur directeur de la droite d'intersection (D) des plans $(\mathcal{P})$ et (Q).

(10) Représentation paramétrique d'un plan dans l'espace :

Un plan $(\mathcal{P})$ est déterminé par :

- un point $A(x_A; y_A; z_A) \in (\mathcal{P})$.
- Deux vecteurs directeurs :

$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et on note : $\mathcal{P}(A; \vec{u}; \vec{v})$

Déf On appelle représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$ le système :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases} \quad \text{avec : } (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

$t; t'$ sont des paramètres.

★ **Exemple** Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{P}(A; \vec{u}; \vec{v})$ avec :

$A(1; 0; 0)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-3\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}$

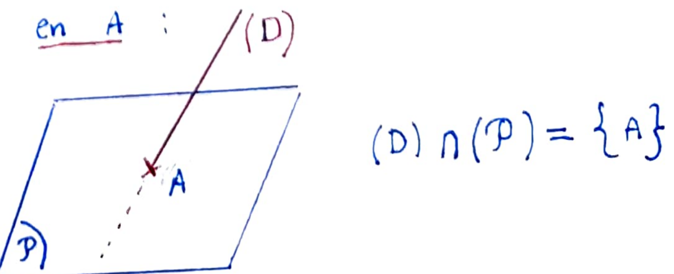
Réponse :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}.t + 7t' \\ y = -3t + 2t' \\ z = 3t' \end{cases} \quad (t; t') \in \mathbb{R}^2$$

(11) Les positions relatives de droites et de plans.

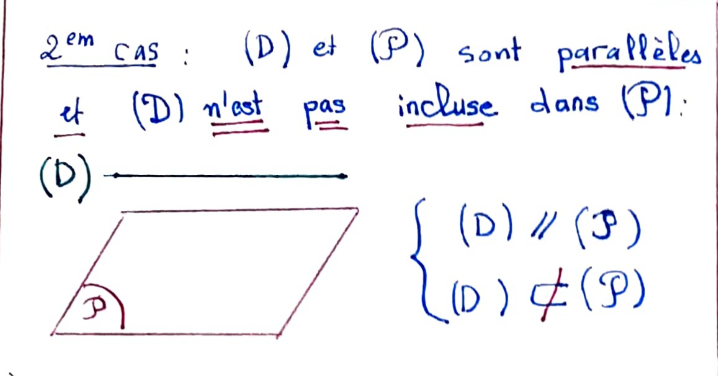
Il y a 3 cas possibles :

1er cas : (D) et $(\mathcal{P})$ sont sécantes en A :



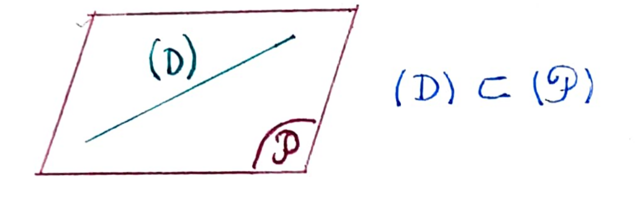
$(D) \cap (\mathcal{P}) = \{A\}$

2^{em} cas : (D) et (P) sont parallèles et (D) n'est pas incluse dans (P) :



$$\begin{cases} (D) \parallel (P) \\ (D) \not\subset (P) \end{cases}$$

3° cas : (D) est incluse dans (P)



$(D) \subset (P)$

EX.5 Determiner l'intersection de : (D) et (P) où :

$(P) : 3x - y + z - 1 = 0$

et $(D) : \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -2 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

★ Série d'exercices ★

ex.1 : [BAC .Pro - 2018] (2pt)

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient (D_1) la droite passant par le point $A(1; 2; -1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(-1; 0; 1)$ et (D_2) la droite dont un représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. Montrer que le point $A(1; 2; -1)$ appartient à (D_2).

2. Donner une équation cartésienne du plan défini par (D_1) et (D_2).

★ ★ ★ ★ ★

ex.2 : [BAC. Pro. Session de rattrapage. 2018] (3pts)

L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. On considère les points $A(1; 1; 0)$; $B(0; -1; 0)$ et $C(-1; 0; 1)$

1- a) Vérifier que : $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{BC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

1- b) Montrer que les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{BC}$ sont linéairement indépendants.

2- a) Vérifier que : $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (BC).

et qu'une représentation paramétrique de la droite (OA) est : $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

2. b) Montrer que les droites (OA) et (BC) ne sont pas coplanaires

2. c) En déduire sans calcul que B est le seul point d'intersection du plan (OAB) et la droite (BC)

★ ★ ★ ★

ex. 3 : Considérons le point $A(4; -1; 2)$ et le plan : $(P) : 2x - y + 3z + 5 = 0$

1°/ Vérifier que : $A \notin (P)$

2°/ Donner deux points $B \in (P)$ et $C \in (P)$.

3°/ Donner deux vecteurs directeurs de (P) puis une représentation paramétrique du plan (P)

4°/ Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) puis celle de (AC).

★ Bon courage !!